

Общие положения

1) Максимальная оценка за каждую задачу — 7 баллов.

2) 7 баллов ставится за безукоризненное решение задач; 6 баллов означает, что в решении допущена мелкая погрешность, например, не разобран частный случай, не влияющий на решение. 4 или 5 баллов означают, что все идеи, необходимые для решения найдены, задачу в целом надо считать решённой, однако приведённое решение имеет существенные недостатки, например, в доказательстве ключевого факта имеются пробелы, устранимые не совсем очевидным образом. 2 — 3 балла ставится, если в решении задачи имеется серьёзное продвижение, однако для решения необходимы дополнительные идеи, не указанные в решении. 1 балл означает, что в решении имеется только очень мелкое продвижение, как то: замечен, но не доказан ключевой факт, разобран нетривиальный частный случай или приведён (но не обоснован) верный ответ, который не вполне тривиален. Если приведённые в решении факты, идеи, выкладки к решению явным образом не ведут, то задача оценивается в 0 баллов, также как и в случае, когда решение задачи отсутствует.

3) В случае наличия в одной работе нескольких решений оценивается ровно одно решение, то, которое приносит больше баллов. За другие решения баллы не снимаются и не начисляются.

4) Оценка за задачу не может быть снижена за неаккуратный почерк, ошибки в русском языке, или явные описки в выкладках. Также недопустимо снижение баллов за не чёткий чертёж в геометрической задаче или даже за отсутствие такового. Нельзя требовать с участника олимпиады, чтобы он переписывал условие задачи, в том числе не обязательна краткая запись условия геометрических задач.

5) Школьник имеет право сам выбрать способ решения той или иной задачи; не допускается снижать оценку за то, что выбранный школьником способ решения не самый лучший или отличается от предложенных нами способов.

6) Факты и теоремы школьной программы (в том числе и те, которые приведены только в задачах школьных учебников) следует принимать без доказательств. Школьник имеет право без доказательства использовать любые такие факты, даже если они проходятся в более старших классах. Допускается (также без доказательств) использование математических фактов, изучающихся на факультативах. В частности, без ограничения можно применять формулы аналитической геометрии, математического анализа, принцип математической индукции, теоремы теории графов и т.п.

7) Критерии оценки, приведённые в прилагаемых решениях (таблица в конце решения каждой задачи) являются обязательными и не могут быть изменены. Однако это не означает, что выставяемые за задачу баллы обязательно должны совпасть с приведёнными в таблице: в случае, когда жюри вырабатывает дополнительные критерии (см. следующий пункт) жюри может выставить балл, которого в таблице нет (например, в таблице предусмотрены только 0 и 7 баллов, а

жюри выставляет 5 баллов). Таблицы критериев составлены таким образом, что перечисляют отдельные случаи; накопление баллов за разные пункты не предусмотрено.

8) В случае, если решение школьника принципиально отличается от решений, предложенных программным комитетом, и не может быть подведено под предлагаемые критерии, проверяющие вырабатывают критерии самостоятельно в соответствии с пунктом 2.

9) В случае возникновения спорных ситуаций при проверке работ олимпиады жюри вправе обратиться за разъяснениями и советом к составителям пакета заданий, т.е. к д.ф-м.н. Валерию Трифоновичу Шевалдину (адрес эл. почты **valerii.shevaldin@imm.uran.ru**) и к.ф-м.н. наук Сергею Эрнестовичу Нохрину (адрес эл.почты **varyag2@mail.ru**, тел. +**79220350324**). Мы ответим на все Ваши вопросы.

**Муниципальный этап Всероссийской олимпиады
школьников по математике
в 2015 – 2016 учебном году
10 класс**

Время выполнения заданий — 4 часа

10.1. Пусть a, b, c — последовательные члены арифметической прогрессии, а x, y, z — последовательные члены геометрической прогрессии, состоящей из положительных чисел. Докажите равенство $x^b \cdot y^c \cdot z^a = x^c \cdot y^a \cdot z^b$.

Решение: По условию $b = a + t$, $c = b + t = a + 2t$ для некоторого числа t и $y = xq$, $z = yq = xq^2$ для некоторого положительного числа q . Тогда

$$x^b \cdot y^c \cdot z^a = x^{a+t} \cdot (xq)^{a+2t} \cdot (xq^2)^a = x^{a+t+a+2t+a} \cdot q^{a+2t+2a} = x^{3a+3t} \cdot q^{3a+2t}.$$

Также

$$x^c \cdot y^a \cdot z^b = x^{a+2t} \cdot (xq)^a \cdot (xq^2)^{a+t} = x^{a+2t+a+a+t} \cdot q^{a+2(a+t)} = x^{3a+3t} \cdot q^{3a+2t}.$$

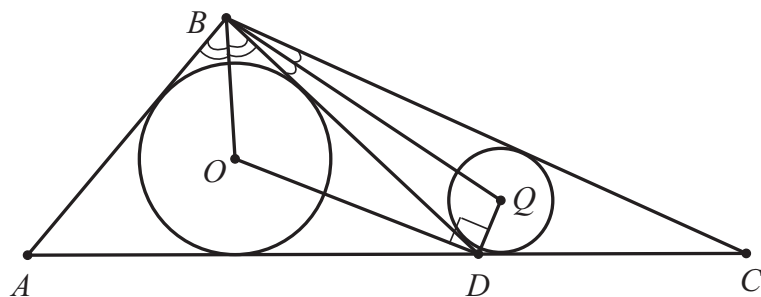
Полученные выражения равны; утверждение задачи доказано.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верное доказательство	7 баллов
Ход доказательства верен, но доказательство не состоялось из-за арифметических ошибок	5 баллов
Утверждение доказано для некоторых бесконечных серий примеров	2 балла
Утверждение проиллюстрировано на конкретном примере (или на конечном числе примеров)	1 балл
Выкладки любой длины, из которых не видно хода решения	0 баллов

10.2. На стороне AC треугольника ABC отметили точку D ; в треугольниках ABD и BDC отметили центры вписанных окружностей — точки O и Q соответственно. Можно ли около четырёхугольника $BODQ$ описать окружность? Ответ обосновать. В параллелограмме $ABCD$ известны угол $\angle A = \alpha$ и диагональ $BD = d$. Пусть M и N — основания высот, опущенных из вершины B на прямые CD и AD соответственно. Найдите MN .

Решение: Центр вписанной в треугольник окружности есть точка пересечения биссектрис треугольника, поэтому $\angle OBD = \angle OBA$ и $\angle QBD = \angle QBC$ — см. рисунок. Тогда $\angle OBQ = \frac{1}{2} \angle ABC < 90^\circ$. Кроме того, лучи DO и DQ — биссектрисы смежных углов ADB и CDB соответственно, поэтому $\angle ODQ$ — прямой. Тогда в четырёхугольнике $BODQ$ сумма двух противоположных углов меньше 180° , поэтому описать около него окружность нельзя.



К решению задачи 10.2

Ответ: Такая ситуация невозможна.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Доказаны оба факта $\angle OBQ < 90^\circ$ и $\angle ODQ = 90^\circ$, но вывод об отсутствии описанной окружности не сделан	6 баллов
Доказан ровно один из двух фактов: 1) $\angle OBQ < 90^\circ$; 2) $\angle ODQ = 90^\circ$	3 балла
Замечено, что точка Q (или точка O) лежит на биссектрисах соответствующих углов (без дальнейшего продвижения в решении)	1 балл
Ответ без обоснования ИЛИ неверный ответ	0 баллов

10.3. Имеется восемь единичных кубиков. На каждой грани каждого из этих кубиков поставлены точки (как на косточках домино), при этом на всех гранях каждого кубика поставлено одно и то же число точек. Из этих кубиков составили куб со стороной 2. Оказалось, что на всех шести гранях этого куба точек тоже поровну. Количества точек на гранях трёх единичных кубиков известны (см. рисунок).

а) Можно ли определить количества точек на гранях ещё хотя бы одного единичного кубика?

б) Можно ли определить количества точек на гранях всех остальных единичных кубиков? Ответы обосновать.

Решение: Рассмотрим две смежные грани куба. Так как кубики, примыкающие к общему ребру этих граней, одни и те же, то они дают одинаковое количество точек на обеих рассматриваемых гранях. Тогда одинаково должно быть и общее число точек на двух оставшихся кубиках этих граней, то есть для любых пар кубиков, примыкающих к противоположным рёбрам куба, суммарное количество точек на них одинаково. Для двух правых верхних кубиков это количество равно 7. Значит, 7 точек находится и на гранях двух левых нижних кубиков. Тогда на каждой грани левого нижнего кубика тыльной грани стоит 4 точки.

Остальные количества точек на гранях кубиков определить однозначно нельзя. В самом деле, пусть на гранях левого верхнего кубика лицевой грани стоит по x

точек, на гранях правого нижнего кубика тыльной грани — по $x + 1$ точке, на гранях правого нижнего кубика лицевой грани — по y точек и на гранях верхнего левого кубика тыльной грани — по $y + 1$ точке. Тогда на всех гранях большого куба будет по $x + y + 8$ точек, и в качестве x и y можно взять любые натуральные числа.

Примечание: Легко доказывается, что условия равенств суммарного количества точек на парах кубиков, примыкающих к противоположным рёбрам куба является не только необходимым, но и достаточным для того, чтобы куб стал магическим, то есть это свойство есть критерий.

Ответ: Количество точек на гранях всех единичных кубиков определить нельзя. Можно определить только число точек на гранях левого нижнего кубика тыльной грани. Оно равно 4.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Обосновано, что на гранях левого нижнего тыльного кубика 4 точки и показано, что остальные количества точек не определить	7 баллов
Обосновано, что на гранях левого нижнего тыльного кубика 4 точки, но не показано, что остальные количества точек не определить	3 балла
Доказано, что в магическом кубе суммарное число точек на кубиках, примыкающих к противоположным рёбрам, одно и то же	2 балла
Показано, что число точек на гранях кубиках, примыкающих к верхнему левому и правому нижнему рёбрам однозначно не определяется (достаточно примера двух разных кубов)	по 1 баллу за каждое число
Пример куба, удовлетворяющего условиям задачи	0 баллов

10.4. На доске записано выражение

$$10 : 9 : 8 : 7 : 6 : 5 : 4 : 3 : 2 : 1.$$

В нём требуется расставить скобки (одну или несколько пар) так, чтобы значение выражения оказалось целым числом. Каким наименьшим числом оно может при этом оказаться? Ответ обосновать.

Решение: При любой расстановке скобок выражение после равносильных преобразований сведётся к дроби, у которой в числителе и знаменателе стоят произведения некоторых натуральных чисел, не превосходящих 10, причём каждое такое число входит в числитель дроби, либо в её знаменатель. Если число 7 попало в знаменатель, то значение дроби не целое. Значит, 7 стоит в числителе, и значение выражения кратно 7. Таким образом, значение выражения не меньше 7. Этот

минимум достигается, если расставить скобки следующим образом:

$$10 : 9 : (8 : 7 : 6) : (5 : 4 : 3) : 2 : 1.$$

Ответ: 7.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Доказано, что меньше 7 значение выражения быть не может и приведён пример, когда оно равно 7	7 баллов
Доказано, что меньше 7 значение выражения быть не может, но пример, когда оно равно 7, неверен или не приведён	3 балла
Приведён пример расстановки скобок, (без доказательства его оптимальности), при котором выражение равно 7	2 балла
Примеры, при которых значение выражения больше 7 или не является целым, а также доказательства, что сумма не может быть меньше чисел 1, 2, ..., 6	0 баллов

10.5. На плоскости расположен квадрат со стороной 1 (назовём его большим) и m маленьких квадратов со стороной $a < 1$. Известно, что соответствующие стороны всех квадратов (и большого, и маленьких) параллельны, центры всех маленьких квадратов принадлежат большому квадрату, а маленькие квадраты попарно не пересекаются. Докажите неравенство $\sqrt{m} - 1 \leq \frac{1}{a}$.

Решение: Рассмотрим квадрат со стороной $1 + a$, центр которого совпадает с центром большого квадрата, а стороны параллельны сторонам уже имеющихся квадратов. Граница этого «расширенного» квадрата отстоит от границы большого на $\frac{a}{2}$, то есть на половину стороны маленького. Тогда расширенный квадрат полностью содержит все m маленьких квадратов. Так как маленькие квадраты не пересекаются, то их суммарная площадь не больше площади расширенного квадрата. Отсюда имеем неравенство $ma^2 \leq (1 + a)^2$. Оно при положительных m и a

равносильно доказываемому.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верное доказательство	7 баллов
Найдена фигура, целиком содержащая все маленькие квадраты (больше «расширенного» квадрата) и вычислена её площадь	4 балла
Есть идея сравнить сумму площадей маленьких квадратов с площадью большого (при отсутствии решения)	2 балла
Построен пример, показывающий, что возможно равенство $\sqrt{m} - 1 = \frac{1}{a}$ (при отсутствии решения)	1 балл
Любые выкладки и рассуждения, не ведущие к решению	0 баллов

10.6. На острове Невезения с населением 96 человек правительство решило провести пять законов. Каждым законом недоволен ровно половина всех граждан. Гражданин выходит на митинг в том и только том случае, когда он недоволен более, чем половиной всех законов. Какое наибольшее число людей может выйти на митинг? Ответ обосновать.

Решение: Будем называть *недовольством* каждую пару закон — гражданин, в которой гражданин недоволен законом. Общее количество недовольств равно $5 \cdot \frac{96}{2} = 240$. С каждым вышедшем на митинг гражданином связаны по крайней мере три недовольства, поэтому на митинге не может быть более $240 : 3 = 80$ граждан.

Приведём пример, показывающий, что 80 граждан на митинг выйти могут. Разделим граждан на 6 партий, в каждой по 16 человек; партии занумеруем числами от 1 до 6. Пусть первым законом недовольны все представители партий 1, 2 и 3, вторым — партий, 2, 3 и 4, третьим — партий 3, 4 и 5, четвёртым — партий 4, 5 и 1, пятым — партий 5, 1 и 2. Тогда представители всех этих пяти партий выйдут на митинг.

Ответ: 80 человек.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный и обоснованный ответ	7 баллов
Приведён пример, когда на митинг выйдет 80 человек (без доказательства, что больше выйти не может)	3 балла
Доказано, что больше 80 человек на митинг выйти не могут, но пример на 80 человек отсутствует	2 балла
Не оптимальные примеры (в любом количестве), и более грубые оценки, чем 80 человек	0 баллов